6) H. Fujisaka, H. Ishii, T. Yamada and M. Inoue, 投稿準備中.

複素特性指数 λ_z の零点分布とカオス転移

鹿児島大・理　　井上政義，藤坂博一

先に力学量 A_t の拡散的性質と間欠的性質を特徴づける特性指数を次の様に導入した。[1) 2)]

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln < A_t^q > \tag{1}$$

ここで<…>はアンサンブル平均である。今回は q を複素数に拡張し，$Z(z)$ を次式で定義する。

$$\lambda_z \equiv \frac{1}{z} \ln Z(z) \tag{2}$$

時系列 $\{A_t\}$ のカオス転移と $Z(z)=0$ の根の分布との関係を調べる。

例 1. 局所リヤプノフ指数のゆらぎ

次のマップ

$$f(x) = \begin{cases} x/p, & (0 \leqq x \leqq p) \\ (x-p)/(1-p)。 & (p < x < 1) \end{cases} \tag{3}$$

を考え，A_t は次の様にとる，

$$A_t = \prod_{s=0}^{t-1} |f'(x_s)|;\ A_0 = 1。 \tag{4}$$

この A_t に対する λ_q は次の様に厳密に求まる。[1)]

$$\lambda_q = \frac{1}{q} \ln \{ e^{(q-1)\lambda_\infty} + e^{(q-1)\lambda_{-\infty}} \}, \tag{5}$$

where

$$\lambda_\infty = \mathrm{Max}\ (\ln\frac{1}{p},\ \ln\frac{1}{1-p}), \tag{6}$$

$$\lambda_{-\infty} = \mathrm{Min}\ (\ln\frac{1}{p},\ \ln\frac{1}{1-p})。 \tag{7}$$

この場合 $\lambda_{q=0}=-p\ln p-(1-p)\ln(1-p)$ となり，これは普通のリヤプノフ指数に一致している。また $D=(\partial\lambda_q/\partial q)_{q=0}$ は局所リヤプノフ指数の揺らぎによる拡散の係数を与えている。ところで(2)と(5)から

$$Z(z)=\mathrm{e}^{(z-1)\lambda_\infty}+\mathrm{e}^{(z-1)\lambda_{-\infty}} \tag{8}$$

であるから $Z(z)=0$ の根 z_n は，

$$z_n=1+\mathrm{i}\frac{(2n+1)\pi}{\ln\{(1-p)/p\}};\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots。 \tag{9}$$

すなわち根は複素平面上において $z=1$ という直線上に等間隔に並んでいる。極限として，二つの場合が考えられる。

1) $p\to\frac{1}{2}$：根すなわち零点は Riemann 球面の N 点に集積する。このとき，特性指数は $\lambda_q=\ln 2$ という一定値をとる。局所リヤプノフ指数が揺らいでいるカオスから揺らいでいないカオスへ転移している。

2) $p\to0$ (or $p\to1$)：$z=1$ という実根が出現する。この場合 λ_q は $q=1$ に不連続点をもち，$\{A_t\}$ はカオス転移を示している。

例 2. カオス拡散のスケーリング関数

拡張された一次元マップ

$$\begin{cases} x_{t+1}=n_t+f(\xi_t), & (10)\\ f(\xi_t)=\xi_t+r\sin(2\pi\xi_t), & (11)\end{cases}$$

を考える。ここで n_t および ξ_t は，それぞれ x_t の整数部および小数部である。A_t は次の様にとる，

$$A_t=\exp(n_t);\quad n_0=0。 \tag{12}$$

この場合，拡散係数 $D=(\partial\lambda_q/\partial q)_{q=0}$ は $r=1$ で発散している。$r\ (\le 1)$ が 1 に近い時，λ_q は次のようにスケーリング関数で表わせることがわかっている，[3]

$$\lambda_q=\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{q}{q_*}\right), \tag{13}$$

where

$$q_* = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{D} \quad 。 \tag{14}$$

式(13)の λ_q に対する $Z(z)$ は(2)より，

$$Z(z) = \exp\left\{\frac{2z}{\pi} \arctan\left(\frac{z}{q_*}\right)\right\}, \tag{15}$$

であるから，$Z(z)=0$ の根 z_n は

i) Riemann 球面のN点

ii) $(x, y) = (0, \pm q_*)$; $(z \equiv x + iy)$

にある。極根 $r \to 1$ では $q_* \to 0$ となるから，実根 $z=0$ が出現する。この時 $\lambda_q = 1$ or -1 となり，自発的対称性の破れを伴うカオス転移が発生している。

以上のように $Z(z)=0$ の実根の出現または根の Riemann 球面のN点への集積とカオス転移が関係している。これは Yang-Lee [4] の相転移論と類似していて興味深い。講演では，微分系のスケーリング関数[5] その他についても発表した。

文　献

1) H. Fujisaka, P.T.P. **71** (1984), 513.
2) H. Fujisaka and M. Inoue, P.T.P. **74** (1985), 20.
3) H. Fujisaka, M. Inoue and H. Uchimura, P.T.P. **72** (1984) 23.
4) C. N. Yang and T. D. Lee, P.R. **87** (1952), 404; T. D. Lee and C. N. Yang, P.R. **87** (1952), 410.
5) M. Inoue and H. Fujisaka, P.R. B **32**, (1985), 277.

一様・非一様カオス転移の統計的性質

九工大　山　田　知　司
鹿大理　藤　坂　博　一

力学変数によって張られる位相空間の中に２つの接近した初期点を考え，その間の時間 t における距離を $\Delta(t)$ とおくと，大きな t で